Μαθημα 20ο ① 17/5/2017

Τοπολογια

Ασκηση

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη στον (E,ρ) ①

(a_{k_n}) υπακολ. $\Rightarrow \exists \lim_n \rho(a_n, a_{k_n}) = 0$

Αποδειξη

① $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \rho(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_0$

Θετω $\left.\begin{array}{l} m = k_n \geq n \\ n \geq n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow k_n \geq n_0$

$\Rightarrow \rho(a_n, a_{k_n}) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \ S_n < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, $\lim S_n = 0$

Ασκηση

$f : (E_1,\rho_1) \xrightarrow[\varepsilon\pi\iota]{1-1} (E_2,\rho_2)$ συνεχης στον E_1

$f^{-1} : E_2 \to E_1$ ομοιομ. συνεχης

(E_1,ρ_1) πληρης $\Rightarrow (E_2 = f(E_1), \rho_2)$ πληρης

(E_2,ρ_2) πληρης

Εστω $(y_n)_n \subseteq E_2$ βασικη δδο $\exists \ y \in E_2 : y_n \xrightarrow{\rho_2} y$

$y_n \in E_1, \forall n \Rightarrow \exists! \ x_n \in E_1 : f(x_n) = y_n \Leftarrow x_n = f^{-1}(y_n)$

f^{-1} ομοιομ. συνεχης (y_n) βασικη $\Rightarrow (f^{-1}(y_n))_n = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

βασικη στο E_1

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη στον $(E_1,\rho_1) \Rightarrow (x_n)_n$ συγκλινουσα στον E_1

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists \ x \in E_1 : x_n \xrightarrow{\rho_1} x \\ f(x_n) = y_n \\ f \text{ συν στο } E_1 \end{array}\right\} \underset{\text{συν}}{\overset{f}{\Rightarrow}} \underset{= y_n}{f(x_n)} \xrightarrow{\rho_2} f(x) =: y \Rightarrow y_n \to y$

Παραδειγμα

$f \quad [1,+\infty) \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} (0,1]$ συνεχης

$f^{-1} \quad (0,1] \to [1,+\infty)$ οχι ομοιομ συνεχης

$y \mapsto 1/y$

$x \mapsto 1/x \quad , \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{y}$ συνεχης

⊛ $\overline{[1,+\infty)} = [1,+\infty)$ κλειστοτητα

$\Rightarrow [1,+\infty)$ κλειστο $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow ([1,+\infty), |\cdot|)$

Ασκηση

$A \subseteq (E,\rho)$ μ.χ

A ακολουθιακα συμπαγες $\overset{\text{οφ}}{\Longleftrightarrow} (A,\rho_A)$ ακολουθιακα συμπαγης

$\subseteq E$

$\Leftrightarrow (A,\rho_A)$ πληρης και ολικά φραγμενος $\Leftrightarrow$

A πληρες $\subseteq (E,\rho)$ και A ολικα φραγμενο $\subseteq E$

$A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ειναι ακολουθιακά συμπαγες $\subseteq \mathbb{R}$;

με την αποσταση ειναι πληρης μ.χ

$\overline{[0,1]} = [0,1] \Rightarrow [0,1]$ κλειστο $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow [0,1]$ πληρης

⊛ $[0,1]$ ακολουθιακα συμπαγες $\subseteq \mathbb{R} \overset{\text{οφ}}{\Longleftrightarrow} \forall (x_n)_n \subseteq [0,1] \ \exists (x_{k_n})$ υπακ.

με $x_{k_n} \to x \ \exists x \in [0,1]$

$(0,1]$ οχι ακολ. $\quad x_n = \frac{1}{n} \in (0,1] \ \forall n$

$x_{k_n} = \frac{1}{k_n} \longrightarrow 0 \notin (0,1]$

(8)

Ασκηση

$A \subseteq (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$

(4) A φραγμενο $\Leftrightarrow$ A ακολουθιακα συμπαγες (3)

Αποδειξη

($\Rightarrow$) A φραγμενο , νδο $\bar{A}$ ακολ. συμπαγες

(i) A φραγμενο $\Rightarrow$ $\delta(\bar{A}) = \delta(A) < \infty$ $\Rightarrow$ $\bar{A}$ φραγμ $\subseteq \mathbb{R}^k$ $\Rightarrow$ $\bar{A}$ ολικα φραγμ (1)

(ii) $\bar{A}$ κλειστο $\subseteq \mathbb{R}^k$, $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ πληρης $\Big\}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}$ πληρες $\subseteq \mathbb{R}^k$ (2)

Αρα απο (1) και (2) $\Rightarrow$ (3)

(3) $\Rightarrow$ (4) $\bar{A} \subseteq A$ ολ. φραγμ. $\Rightarrow$ A ολικο φραγμ. $\Rightarrow$ A φραγμ

Ορισμος

Εστω μ.χ (E, ρ) τοτε συλλογη $\{A, B\}$ 2-υποσυνολων του E λεγεται διαμεριση , $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = E$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

Ορισμος

Μια $\{A, B\}$ διαμεριση του (E, ρ) θα λεγεται ανοιχτη αν.ν επιπλεον $A \cap B \subseteq E$ ανοιχτο , κλειστο αν.ν επιπλεον $A, B \subseteq E$ κλειστο

πχ $\underbrace{(0,1)}_{A} \cup \underbrace{(3,4)}_{B} = \Delta \subseteq (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$

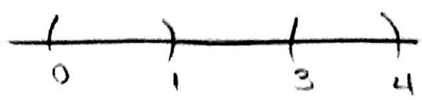
$(\Delta, \rho_\Delta) = (E, \rho)$

$(\Delta, \rho_\Delta) \subseteq (E, \rho)$, $(\Delta, \rho_\Delta) \subseteq G$ ανοιχτο στο Δ $\Leftrightarrow$ $\exists\, G' \subseteq (E, \rho)$ ανοιχτο στο E ωστε $G = G' \cap \Delta$

$G = (0,1)$ αν στο Δ

$G' = (0,1)$ αν στο Δ

$G' \cap \Delta = G$



(1)

* $(\Delta, \rho_\Delta) \subseteq (E, \rho)$

$(0,1)$ κλειστό στο Δ

$(0,1) = S \cap \Delta$, $S = [0,1]$, $S = [-1,2]$

↳ κλειστό στο Δ — κλειστό στο $\mathbb{R}$

ανοικτό και κλειστό

μη συνεκτικό π.χ.

* $\Delta = (0,1] \cup [2,3)$ είναι ανοικτή διαμέριση στο $(\Delta, |\cdot|_\Delta)$;

$\{(0,1], [2,3)\}$ ανοικτή (κλειστή) διαμέριση στο $(\Delta, |\cdot|_\Delta)$

$G = (0,1]$

$G' = (0,2) \Rightarrow G' \cap \Delta = G$

$G'' = (0,2] \Rightarrow G'' \cap \Delta = G$ } $\Rightarrow$ G ανοικτό & κλειστό στο Δ

όταν ο χώρος όμως δεν είναι συνεκτικός.

Πρόταση

$\{A,B\}$ ανοικτή διαμέριση του $(E,\rho) \iff \{A,B\}$ κλειστή διαμέριση του (E,ρ)

$B = A^c$, ανοικτά $A, B \Rightarrow A, B$ κλειστά (ως συμπλήρωμα ανοικτού)

$A = B^c$

Πχ $A = (0,2)$ ανοικτό στο $(0,3) = \Delta$

$B = [2,3)$ όχι ανοικτό στο $(0,3)$

$B^\circ_{(0,3)} \subsetneq B$

$2 \in B$ είναι σημείο του B° όχι $2 \notin B^\circ$

$$2 \in B^\circ_{(0,3)} \iff \exists\, r>0 \ \ \underbrace{B_{(0,3)}(2,r)}_{\underbrace{(0,3)}_{\Delta} \cap (2-r,\,2+r)} \subseteq B = [2,3)$$

$$\Rightarrow \Delta \cap (2-r, 2+r) \not\subseteq [2,3)$$

G ανοιχτο στο $\Delta \Leftrightarrow \exists\, G'$ ανοιχτο στο $\mathbb{R}$: $G' \cap \Delta = G \Rightarrow$

G ανοιχτο στο $\mathbb{R}$

$G \subseteq \Delta$

G ανοιχτο στο $\mathbb{R} \Rightarrow G' = G \Rightarrow G = G' \cap \Delta = G \cap \Delta \Rightarrow$

G ανοιχτο στο Δ

Ορισμος

(E,ρ) θα λεγεται **συνεκτικος** $\Leftrightarrow \nexists \{A,B\}$ ανοιχτη διαμεριση του E

Προταση

Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα

1. (E,ρ) συνεκτικος
2. Τα μονα ταυτοχρονα ανοιχτα και κλειστά $\subseteq E$ ειναι τα εξης: $\emptyset$, E
3. $\forall A \neq \emptyset,\ A \subsetneq E \Rightarrow \partial A = \bar{A} - A^{o} \neq \emptyset$

Αποδειξη

$(1 \Rightarrow 2)$ Εστω οτι δεν ισχυει το 2, αρα $\exists A \neq \emptyset,\ A \subsetneq E$

A ανοιχτο και κλειστο

$B = A^{c}$ ανοιχτο και κλειστο $\Rightarrow \{A, A^{c} = B\}$ ανοιχτη διαμεριση του E

αρα ο (E,ρ) οχι συνεκτικος

$(2 \Rightarrow 3)$ Εστω $A \neq \emptyset,\ A \subsetneq E$ θδο $\partial A = \emptyset$

Αν $\partial A = \emptyset \Rightarrow \bar{A} - A^{o} = \emptyset$ και $A^{o} \subseteq \bar{A} \Rightarrow A^{o} = \bar{A} = \theta$

$\theta = \bar{A} \Rightarrow \theta$ κλειστο $\Big\}$ $\theta \neq \emptyset$

$\theta = A^{o} \Rightarrow \theta$ ανοιχτο $\quad \theta \subsetneq E$

$\theta = \bar{A} \supseteq A \neq \emptyset \Rightarrow \theta \neq \emptyset$

$\theta \subsetneq E$ γιατι $\theta = A^{o} \subseteq A \subsetneq E$

$(3 \Rightarrow 1)$ **ασκηση στο σπιτι**